

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a  
ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

## XII. osztály - H2 – Természettudomány

### 1. Feladat (20 pont)

Adott a  $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = I_2\}$  halmaz ( $A^t$  az  $A$  mátrix transzponáltja).

- Igazold, hogy  $(G, \cdot)$  egy csoport!
- Léteznek az  $A, B \in G$  mátrixok úgy, hogy  $A + B \in G$ ?
- Legyen  $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid {}^t A \cdot A = I_2\}$ . Határozd meg a  $H$  halmaz elemeinek számát és igazold, hogy  $(H, \cdot)$  egy csoport!

### 2. Feladat (20 pont)

Adott az  $f: [0, 1] \rightarrow \left[\frac{e}{2}, e^2\right], f(x) = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{2}{x+1}}$  függvény.

- Ha  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  egy deriválható függvény, amelynek deriváltja folytonos igazold, hogy:  
$$\int_0^1 (1 + xg'(x)) \cdot e^{g(x)} dx = e^{g(1)}.$$
- Számítsd ki:  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- Igazold, hogy az  $f$  függvény invertálható és számítsd ki  $\int_{\frac{e}{2}}^{e^2} f^{-1}(x) dx$ .

### 3. Feladat (20 pont)

Adott a  $(G, *)$  csoport, ahol  $G = (2, \infty)$  és  $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ , bármely  $x, y \in G$  esetén.

- Ha  $a, b, c \in G$  és  $a * b = c, b * c = a, c * a = b$ , igazold, hogy  $a = b = c$ .
- Határozd meg az  $(a_n)_{n \geq 1} \subset G$  sorozatot tudva, hogy  $a_1 * a_2 * \dots * a_n = n + 3$  bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén!
- Legyen  $H$  a  $G$  csoport egy részcsoportja, amely tartalmazza az összes  $k \geq 3$  természetes számot. Igazold, hogy  $H$  tartalmazza az összes  $q > 2$  racionális számot!

### 4. Feladat (30 pont)

Egy oroszán egy  $O$  pontból indulva  $a(t) = \left(\frac{4t^2+2}{e^{15}} + \frac{2t}{e^4}\right)e^{t^2} + 3t^2 - 12t + 9$  gyorsulással üldözi zsákmányát, ahol az  $a(t)$  gyorsulás mértékegysége  $m/s^2$  és az idő  $t \geq 0$  másodpercben van mérve.

A  $t = 0$  időpontban a pillanatnyi sebessége  $v(0) = \left(1 + \frac{1}{e^4}\right) m/s$ .

- Igazold, hogy  $v(t) = \left(\frac{2t}{e^{15}} + \frac{1}{e^4}\right)e^{t^2} + t^3 - 6t^2 + 9t + 1, t \geq 0$ .
- Határozd meg, hogy vannak-e olyan időpontok, amikor az oroszán nyugalmi állapotban van!
- Bizonyítsd be, hogy az oroszán által  $t = 1$  és  $t = 4$  időpontok között megtett távolság nagyobb, mint 11 m!

Megjegyzés: Ha  $S(t)$  az oroszán által  $t$  másodperc alatt megtett út, és  $S$  egy kétszer deriválható függvény, amelynek másodrendű deriváltja folytonos, akkor a sebessége  $v(t) = S'(t)$  és a gyorsulása  $a(t) = S''(t)$ .

#### Megjegyzés:

Munkaidő 3 óra; minden tétel kötelező; hivatalból 10 pontot jár  
A maximális pontszám 100 pont.

Etapa județeană CMA\_H2\_7 martie 2026